

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Naziv aktivnosti</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <b>Kula od karata</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>Sažetak (na materinjem jeziku)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Učenici slažu kulu od karata te, pomoću konkretnih primjera, poopćavaju tvrdnju koliko je karata potrebno za $n$ -ti kat kule. Također, zaključit će općenito, koliko je karata potrebno za izradu kule od $n$ katova, te istinitost tvrdnje dokazati matematičkom indukcijom.                                                                                                             |
| <b>Sažetak (na engleskom)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| House of Cards<br>Students build a house of cards and, with the help of specific examples, they work out a general calculation on the number of cards needed to build the $n$ th floor of the house. Moreover, they draw a conclusion on the number of cards needed to make a tower of $n$ floors, and using mathematical induction they have to prove the truth of the general statement. |
| <b>Svrha zadatka (uvod, vježba, ponavljanje...)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Vježba – brojevi i matematička indukcija                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>Ishodi učenja</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Razlikuje induktivni i deduktivni način zaključivanja</li> <li>• Matematičke tvrdnje dokazuje matematičkom indukcijom</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Predznanje učenika</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Matematička indukcija                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>Potreban materijal</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Igraće karte                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <b>Očekivano vrijeme za aktivnost</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 30 minuta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Očekivano vrijeme za pripremu</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Nije potrebna priprema prije izvođenja aktivnosti                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Kratki opis aktivnosti</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <b>1.dio aktivnosti:</b><br>Učenici slažu “kule od karata” te zapisuju u tablicu koliko su karata koristili za konkretni red kule. Na temelju zapisanih vrijednosti poopćavaju tvrdnju i zaključuju koliko će karata biti potrebno za $n$ -ti red                                                                                                                                          |

kule. Koristeći znanja o prebrojavanju prirodnih brojeva, zaključuju općenito o zbroju karata potrebnih za izgradnju kule od  $n$  katova.

## 2.dio aktivnosti:

Matematičkom indukcijom dokazuju istinitost tvrdnje o zbroju karata potrebnih za kulu karata od  $n$  katova.

### Zadaci za učenike

- Izgradite kulu od karata. Za broj katova koji će vaša kula sadržavati odaberite bilo koji prirodan broj veći ili jednak broju 3.  
*Napomena: kat se sastoji od po dvije karte koje su prslonjene jedna uz drugu plus karte naslonjene na vrhove (karte nosači za sljedeći kat)*
- Popunite tablicu podacima



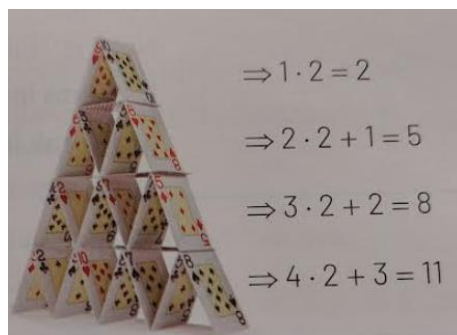
| Broj katova         | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | $n$ |
|---------------------|---|---|---|---|-----|-----|
| Broj karata na katu |   |   |   |   |     |     |
| Zbroj karata        |   |   |   |   |     |     |

Učenici će na temelju svojih kula imati više/manje stupaca u tablici. Nastavnik komentira s učenicima koliko su katova izgradili te koliko im je karata bilo potrebno za pojedini kat. Može izraditi tablicu koju će projicirati učenicima u koju će upisivati podatke koje učenici prebrojavaju.

- Nakon prebrojavanja karata po katovima i njihovom zbroju učenici izvode zaključak o općenitom pravilu za broj karata za  $n$ -ti kat. Nastavnik koristeći podatke iz tablice provjerava je li dano pravilo zaista istinito za broj karata na  $n$ -tom katu.
- Nakon zaključka o općenitom pravilu za broj karata za  $n$ -ti kat, zaključuju kako općenito zapisati pravilo za zbroj karata potrebnih za izgradnju kule od karata od  $n$  katova. Nastavnik koristeći podatke iz tablice provjerava je li dano pravilo zaista istinito.
- Odredite koliko karata je potrebno za 15. kat kule ? Koliko bi nam ukupno karata bilo potrebno za izgradnju kule od karata od 15 katova ?
- Zapišite tvrdnju za zbroj karata općenito i dokažite istinitost tvrdnje matematičkom indukcijom.
- Rasprava s učenicima o deduktivnom i induktivnom načinu zaključivanja.

## Rješenje

Učenici će složiti vlastite kule od karata i na temelju njih popuniti tablicu.



|                     |   |   |    |    |     |                       |
|---------------------|---|---|----|----|-----|-----------------------|
| Broj katova         | 1 | 2 | 3  | 4  | ... | $n$                   |
| Broj karata na katu | 2 | 5 | 8  | 11 | ... | $3n - 1$              |
| Zbroj karata        | 2 | 7 | 15 | 26 | ... | $\frac{n(3n + 1)}{2}$ |

Na 15. katu biti će:  $3n - 1 = 3 \cdot 15 - 1 = 45 - 1 = 44$  karte

Broj karata potrebnih za izgradnju kule od 15 katova:  $\frac{n(3n+1)}{2} = \frac{15 \cdot (3 \cdot 15 + 1)}{2} = \frac{15 \cdot 46}{2} = 345$  karata

**Dokaz matematičkom indukcijom:**

**Tvrdnja:**  $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n+1)}{2}$

**Baza indukcije:**  $n = 1$

$$3 \cdot 1 - 1 = \frac{1(3 \cdot 1 + 1)}{2}$$

$$2 = 2$$

**Pretpostavka indukcije:** pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za proizvoljni prirodni broj  $n$

$$2 + 5 + 8 + 11 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$$

**Korak indukcije:** dokažimo da tvrdnja vrijedi za prirodni broj  $n + 1$

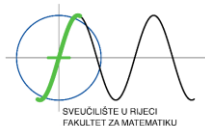
$$2 + 5 + 8 + 11 + \dots + (3n - 1) + (3(n + 1) - 1) = \frac{(n + 1)(3(n + 1) + 1)}{2}$$

po pretpostavci  $\frac{n(3n+1)}{2}$

$$\frac{n(3n + 1)}{2} + (3n + 2) = \frac{(n + 1)(3n + 4)}{2}$$

$$\frac{(3n^2 + n) + 6n + 4}{2} = \frac{3n^2 + 4n + 3n + 4}{2}$$

$$\frac{3n^2 + 7n + 4}{2} = \frac{3n^2 + 7n + 4}{2}$$



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



Nakon sređivanja, dobili smo isti izraz na lijevoj i desnoj strani jednakosti i time pokazali da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve  $n$ .

### Napomene

Uz malu preinaku aktivnost se može koristiti i pri obradi nastavnih sadržaja aritmetičkog niza.

***Ovaj materijal izrađen je u okviru programa usavršavanja “EnLeMaH - Iskustveno učenje matematike od kuće”***

|                   |                                        |
|-------------------|----------------------------------------|
| Autor materijala: | Mia Černivec, mag. educ. math. et inf. |
| Škola:            | Medicinska škola u Rijeci              |
| Datum:            | studenj 2022.                          |